ENSAIT

Ecole Nationale Supérieure
des Arts et IndustriesTextiles

CONCOURS D'ENTREE A - 2001

EPREUVE de MATHEMATIQUES I

Durée 2 heures

(tous les candidats)

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées,sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86 – 228 du 28 juillet 1986.

Aucun résultat ne sera pris en compte s'il n'est accompagné des calculs intermédiaires et de l'énoncé précis des théorèmes utilisés.

Les trois parties sont indépendantes.

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On se propose d'étudier les couples (X, Y) de fonctions réelles d'une variable réelle de classe C^1 sur un intervalle ouvert I et vérifiant l'équation différentielle :

(E) : $\forall t \in I,\ X'(t) \times Y(t) - X(t) \times Y'(t) = 1.$

Toute courbe du plan d'équations paramétriques : $\begin{pmatrix} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{pmatrix}$, où (X, Y) est solution de (E), sera appelée courbe intégrale de (E).

Première partie.

1) On choisit $I =]-1, +1[$ et $X(t) = \frac{1+t}{1-t}$.

a) Donner le développement en série entière de $X(t)$, et le rayon de convergence de cette série entière.

b) Montrer qu'il existe une et une seule fonction Y telle que le couple $(X(t) = \frac{1+t}{1-t}, Y(t))$ vérifie l'équation différentielle (E) sur $I =]-1, +1[$ avec la condition $Y(0) = 0$; on note (E') l'équation différentielle vérifiée par $Y(t)$.

c) On suppose qu'il existe une série entière dont la somme $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ vérifie (E') sur son intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ avec la condition $S(0) = 0$. Donner les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, ainsi que la relation de récurrence liant les coefficients a_n pour $n \geq 3$.

Montrer que : $\forall n,\ |a_n| \leq 1$. En déduire que $R \geq 1$.

Justifier qu'on a écrit le développement en série entière de $Y(t)$ sur I.

2) On recherche à présent des couples (X, Y) de solutions de (E) sur l'intervalle I, de classe C^2 sur I et tels que $X'' = \lambda X$ où λ est un réel donné et X ne s'annule pas sur I.

a) Montrer que Y vérifie la même équation différentielle que X.

b) On suppose que $\lambda = a^2$ où a est un réel strictement positif et on prend $I =]-\infty, +\infty[$; déterminer le couple (X, Y) vérifiant les conditions initiales : $X(0) = 1, Y(0) = 0, X'(0) = 0$.

Reconnaître la courbe intégrale associée à ce couple et la représenter dans le plan.

c) On suppose que $\lambda = -a^2$ où a est un réel strictement positif et on prend $I =]-\frac{\pi}{2a}, +\frac{\pi}{2a}[$; déterminer le couple (X, Y) vérifiant les conditions initiales : $X(0) = 1, Y(0) = 0, X'(0) = 0$.

Reconnaître la courbe intégrale associée à ce couple et la représenter dans le plan.

Deuxième partie.

1) On se donne arbitrairement une fonction $X(t)$ de classe C^1 sur I et qui ne s'annule pas sur I, ainsi qu'un réel $t_0 \in I$, et un réel y_0.

Montrer qu'il existe une et une seule fonction $Y(t)$ telle que (X, Y) soit solution de (E) avec la condition $Y(t_0) = y_0$.

Donner une expression de $Y(t)$ à l'aide d'une intégrale, de $t_0, y_0, X(t_0) = x_0$ et $X(t)$.

2) On choisit $X(t) = \sqrt{1 + t^n}$ (où $n \in N$), $I =]-1, +\infty[$, $t_0 = 0$ et $y_0 = 0$, ce qui détermine une et une seule courbe intégrale (Γ) de (E).

a) On prend $n = 2$. Montrer que la courbe intégrale (Γ) admet une asymptote quand $t \to +\infty$ dont on donnera l'équation.

b) On prend $n > 2$. Justifier l'existence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^n}}$. En déduire que la courbe (Γ) admet une asymptote quand $t \to +\infty$.

3) Soit $(X(t), Y(t))$ une solution quelconque de (E) sur l'intervalle I, telle que $X(t)$ ne s'annule pas sur I, on prend t_0 un point de I et on impose $Y(t_0) = 0$.

a) Montrer que : $\int_{t_0}^{t} \frac{du}{X^2(u)+Y^2(u)} = -\arctan\left(\frac{Y(t)}{X(t)}\right)$.

b) Calculer $\int_{t_0}^{t} X'(u).Y(u).du$ en fonction de $t, t_0, X(t)$, et $Y(t)$.

Troisième partie.

On se donne un couple de fonctions réelles d'une variable réelle $(\rho(t), \theta(t))$ de classe C^1 sur l'intervalle I, où $\theta(t)$ est à valeurs dans $]-\pi, +\pi[$ et on lui associe le couple $(X(t) = \rho(t)\cos\theta(t), Y(t) = \rho(t)\sin\theta(t))$ et la courbe (Γ) d'équations paramétriques :

$$\begin{pmatrix} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{pmatrix}.$$

1) A quelle condition nécessaire et suffisante sur les fonctions $(\rho(t), \theta(t))$ a-t-on $(X(t), Y(t))$ solution de (E) sur I ?

2) Montrer que la courbe du plan d'équation polaire $\rho = \frac{1}{1+\cos\theta}$ pour $\theta \in]-\pi, +\pi[$ est une parabole (P) de foyer O. On la dessinera dans le plan.

3) Montrer que l'application $\varphi : u \mapsto u + \frac{1}{3}u^3$ est une bijection de R (corps des réels) dans lui-même.

4) Déterminer une fonction $\theta : R \to]-\pi, +\pi[$, de classe C^1 sur R telle que $\theta(0) = 0$, de façon que (Γ) la courbe intégrale de (E) associée au couple $(\theta(t), \rho(t))$ soit un arc de la parabole (P). (on exprimera $\theta(t)$ en fonction de φ^{-1} et de arctan).

Montrer que (Γ) est égale à la parabole (P) quand t décrit R.